Летняя школа «Современная математика»
Дубна, июль 2001.

М. Э. Казарян

Дифференциальные формы, расслоения, связности

МЦНМО
Москва, 2002

УДК 514.762.5
ББК 22.151
К14

Проведение летней школы «Современная математика» и издание настоящей брошюры осуществлено при поддержке Московской городской Думы и Московского Комитета Образования.

Казарян М. Э.
К14 Дифференциальные формы, расслоения, связности. — М.: МЦНМО, 2002.— 16 с.

ISBN 5-94057-023-2

Брошюра написана по материалам цикла занятий, проведенных автором в Летней школе «Современная математика» в Дубне в июле 2001 года.

Читатель знакомится с основными понятиями дифференциальной геометрии — дифференциальными формами, расслоениями, метриками, связностями. При этом изложение ведется на языке, который не требует использования сложных формул с многоэтажными индексами, столь обычных для данного предмета.

Брошюра адресована старшим школьникам и младшим студентам.

ББК 22.151

ISBN 5-94057-023-2

Приведенные ниже записки занятий данного курса следует рассматривать как практическое руководство для работы с основными понятиями дифференциальной геометрии — дифференциальными формами, расслоениями, метриками, связностями и т. п. Мы пытались разработать язык, который не требует использования сложных формул с многоэтажными индексами, столь обычных для данного предмета. В результате значительно упрощаются и становятся более понятными все вычисления.

Дифференциальные формы

Инвариантное определение *дифференциальной k-формы* в области $U \subset \mathbb{R}^n$ (или на многообразии) состоит в том, что это произвольная полилинейная (по отношению к умножению на функции) кососимметричная функция от набора k векторных полей. Для практических нужд вполне достаточно координатного определения, согласно которому пространство $\Omega^k U$ дифференциальных k-форм образовано выражениями вида

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} a_{i_1, \ldots, i_k}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}. \tag{1}$$

Таким образом, k-форма задается набором из C_n^k функций — своих коэффициентов. Выражение dx_i можно воспринимать как единый символ (его истинный смысл будет обсуждаться ниже). Знак *внешнего умножения* «$\wedge$» говорит о том, что это умножение *кософкоммутативно*, $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$. Можно сказать, что алгебра $\Omega^* U = \bigoplus \Omega^k U$ дифференциальных форм — свободная кососкоммутативная алгебра над кольцом функций от переменных $x_1, \ldots, x_n$ с образующими $dx_1, \ldots, dx_n$. Операция внешнего умножения $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$ билинейна по отношению к умножению на функции и градуированно антикоммутативна:

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha \in \Omega^{k+l} U, \quad \alpha \in \Omega^k U, \quad \beta \in \Omega^l U.$$

Помимо внешнего умножения, имеется операция d *внешнего дифференцирования*, повышающая степень формы на 1,

$$\Omega^0 U \xrightarrow{d} \Omega^1 U \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \Omega^n U.$$

Если f — 0-форма, то есть функция, то $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ — полный дифференциал этой функции. В общем случае дифференциал $d\omega$ формы (1) имеет вид

$$d\Big(\sum a_{i_1,\ldots,i_k}\,dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}\Big)=\sum da_{i_1,\ldots,i_k}\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}. \tag{2}$$

Операция внешнего дифференцирования удовлетворяет следующим свойствам, которые можно использовать в качестве ее аксиоматического определения:

1) эта операция $\mathbb{R}$-линейна;
2) для 0-формы f (т. е. функции) df — полный ее дифференциал;
3) правило Лейбница: $d(\alpha\wedge\beta)=d\alpha\wedge\beta+(-1)^k\alpha\wedge d\beta$, где $\alpha\in\Omega^k U$;
4) $d\circ d=0$.

Ясно, что единственность такой операции, и, в частности, формула (2) вытекают из этих свойств. Проверка существования несколько труднее: нужно убедиться, что дифференциальная форма (2) не зависит от выбора координат. Иной способ доказательства корректности определения дифференциала состоит в том, чтобы воспользоваться его инвариантным определением, формулируемым на языке функций от векторных полей, которое мы здесь не приводим.

Пример. В пространстве $\mathbb{R}^3$ 1-формы $A\,dx+B\,dy+C\,dz$ и 2-формы $P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy$ задаются, как и векторные поля, наборами из трех функций, а 3-формы $g\,dx\wedge dy\wedge dz$ — одной функцией. Это влечет за собой несправедливое отождествление разных понятий и происходящую от этого путаницу. Соответствующие этим отождествлениям операции называются в классическом анализе *градиентом*, *ротором* и *дивергенцией* соответственно,

$$\begin{tikzcd}
\Omega^0U \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & \Omega^1U \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & \Omega^2U \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & \Omega^3U \arrow[d, equal] \\
\mathcal{F}U \arrow[r, "\mathrm{grad}"] & \mathcal{F}^3U \arrow[r, "\mathrm{rot}"] & \mathcal{F}^3U \arrow[r, "\mathrm{div}"] & \mathcal{F}U.
\end{tikzcd}$$

Здесь $\mathcal{F}U$ — пространство функций, $\mathcal{F}^3U$ — пространство «векторных полей», то есть наборов из трех функций.

Задача. Напишите координатные выражения для градиента, ротора и дивергенции на языке функций и векторных полей.

Представление (1) зависит от выбора координат в области U. При переходе к координатам $y_1,\ldots,y_n$ коэффициенты формы меняются следующим образом: нужно в выражении (1) рассматривать dx_i не как независимые символы, а как полные дифференциалы координатных функций x_i

старой системы координат,

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial y_1} dy_1 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial y_n} dy_n.$$

После этого нужно подставить полученные выражения в (1) и упростить выражение, воспользовавшись полилинейностью и кососимметричностью. Приведенное правило гораздо более естественно и легче запоминается, чем приводимое в учебниках по дифференциальной геометрии правило преобразования ковариантных тензоров, каковыми являются дифференциальные формы.

Приведенное правило замены координат имеет следующее обобщение. Пусть задано отображение $f\colon V \to U$ областей евклидовых пространств (или многообразий), возможно, различных размерностей. Тогда аналогичным образом определяется *операция индуцирования*

$$f^* : \Omega^k U \to \Omega^k V,$$

действующая «в обратном направлении». Обобщением инвариантности операций внешнего умножения и дифференциала являются равенства

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta, \qquad f^* d\alpha = d f^* \alpha.$$

Несмотря на всю важность приведенных выше свойств дифференциальных k-форм, стоит признать, что основное их назначение — *интегрирование* по k-мерным поверхностям. Вот формальное определение. Пусть M — гладкая *ориентированная* k-мерная поверхность. Введем на ней локальные координаты $y_1, \ldots, y_k$, задающие положительную ориентацию. Тогда ограничение на M данной k-формы u принимает вид $u|_M = g(y)\, dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_k$ и интегрирование формы сводится к обычному кратному интегралу

$$\int_M u = \int_D g(y)\, dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_k = \int_D g(y)\, dy_1 \ldots dy_k,$$

где D — соответствующая M координатная область в $\mathbb{R}^k$. Если на поверхности M нельзя ввести единую систему координат, то можно разбить ее на области, и положить интеграл от формы u равным сумме интегралов по отдельным областям.

Основной теоремой теории интегрирования является *формула Стокса*. Пусть M — k-мерная ориентированная поверхность (многообразие) с краем ∂M. Ориентация M индуцирует естественную ориентацию на краю[1]. Тогда для всякой $(k-1)$-формы ω имеет место формула Стокса:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Различными вариантами этой формулы являются формулы Ньютона—Лейбница, Грина, Гаусса—Остроградского, Стокса, изучающиеся в классическом анализе.

Связность в S^1-расслоении

В лекциях А. А. Болибруха[2] неоднократно подчеркивалось, что связность в векторном расслоении — это возможность ковариантного дифференцирования его сечений. Мы здесь изложим иной, геометрический подход к понятию связности. Для простоты мы ограничимся рассмотрением случая, когда слоем расслоения является окружность.

Определение. S^1-*расслоением* называется гладкое отображение $W \xrightarrow{\pi} M$, такое, что для каждой достаточно малой окрестности $U \subset M$ всякой точки задан изоморфизм $\pi^{-1}(U) \cong U \times S^1$, переводящий слои проекции π в слои проекции $U \times S^1 \to U$ на первый сомножитель. Такой изоморфизм называется *тривиализацией* расслоения над областью U. Если задана другая тривиализация (например, над пересечением окрестностей), то переход к ней $U \times S^1 \to U \times S^1$ задается *функцией перехода* g на U, принимающей значения в группе диффеоморфизмов окружности. Потребуем для S^1-расслоений, чтобы все эти диффеоморфизмы являлись поворотами окружности, то есть чтобы все функции перехода принимали значения в группе S^1 поворотов окружности.

На каждом слое $W_x = \pi^{-1}(x) \cong S^1$ расслоения определен угловой параметр $\varphi \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ с точностью до прибавления константы (то есть выбора начала отсчета). Выбор тривиализации равносилен выбору локального сечения, то есть начала отсчета на каждом слое над заданной окрестностью базы M.

[1] Граница ориентируется по правилу: **внешнюю нормаль — в начало**. Если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ — положительный касательный репер поверхности M в точке своего края, причем $\xi_2, \ldots, \xi_k$ касаются края, а вектор ξ_1 трансверсален краю и направлен наружу, то $\xi_2, \ldots, \xi_k$ — положительный касательный репер края ∂M.

[2] А. А. Болибрух. Уравнения Максвелла и дифференциальные формы. М.: МЦНМО, 2002.

Хотя все слои $W_x \cong S^1$ изоморфны между собой, этот изоморфизм неоднозначен. Связность позволяет частично сократить эту неоднозначность.

Определение. *Связностью* в S^1-расслоении называется поле касательных гиперплоскостей в пространстве расслоения, трансверсальное слоям и инвариантное относительно действия группы поворотов S^1.

Для всякого гладкого пути γ на базе M, ведущего из точки x_0 в x_1 и всякой начальной точки $w_0 \in W_{x_0}$ существует единственное поднятие $\widehat{\gamma}$ в пространство расслоения, такое, что $\pi(\gamma) = \widehat{\gamma}$, $\widehat{\gamma}(0) = w_0$ и такое, что путь $\widehat{\gamma}$ касается плоскостей связности в каждой точке (рис. 1). Сопоставляя точке w_0 конечную точку w_1 над x_1 пути $\widehat{\gamma}$, мы получаем отображение слоев $\Pi_\gamma \colon W_{x_0} \to W_{x_1}$. Построенное отображение называется *параллельным переносом* вдоль пути γ.

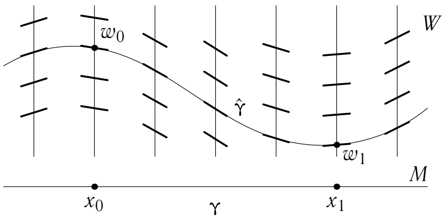

Рис. 1. Параллельный перенос слоев вдоль пути на базе

Таким образом, можно утверждать, что связность — это инфинитезимальный параллельный перенос, то есть способ отождествить бесконечно близкие слои.

Поле гиперплоскостей связности можно задать как поле ядер некоторой 1-формы α в пространстве расслоения. Форма α определена с точностью до умножения на ненулевую функцию. Нормируем α условием того, что ее значение на единичном касательном векторе к слою $\partial/\partial\varphi$ равно 1 (φ-угловой параметр на слое). Если выбрать некоторую тривиализацию, то из S^1-инвариантности поля связности вытекает, что форма α имеет вид

$$\alpha = d\varphi - \pi^*\theta,$$

где 1-форма θ задана на базе расслоения (точнее, в той области базы, над которой выбрана тривиализация). Форма θ называется 1-*формой связности*. Эта форма зависит от выбора тривиализации. Если задана другая тривиализация с угловой координатой $\varphi' = \varphi + g(x)$, $x \in M$, то из равенства

$$\alpha = d\varphi - \pi^*\theta = d\varphi' - \pi^*\theta'$$

мы получаем

$$\theta' = \theta + dg, \tag{3}$$

то есть *при изменении тривиализации к форме связности добавляется дифференциал функции перехода*. Для того, чтобы задать связность в S^1-расслоении, достаточно задать ее 1-форму на каждой области, над которой задана тривиализация, так, чтобы на пересечении областей эти 1-формы были согласованы условием (3).

Если путь целиком лежит в области, над которой задана тривиализация, то поднятие $\widehat{\gamma}$, задающее параллельный перенос вдоль γ, задается равенством $(d\varphi - \theta)(\dot{\widehat{\gamma}}) = 0$, то есть изменение угловой координаты φ удовлетворяет уравнению $\dot{\varphi} = \theta(\dot{\gamma})$. Поэтому угол, на который поворачивается слой при параллельном переносе, равен

$$\Delta\varphi = \int_\gamma \theta.$$

Как зависит параллельный перенос от пути γ, ведущего из точки x_0 в точку x_1? Чтобы понять ответ на этот вопрос, рассмотрим близкий вопрос: чему равен параллельный перенос вдоль замкнутого пути? (Связь с предыдущим вопросом возникает из рассмотрения замкнутого пути $\gamma_2^{-1}\gamma_1$, где γ_1 и γ_2 — два различных пути из x_0 в x_1.) Пусть γ — замкнутая стягиваемая петля, то есть $\gamma = \partial D$ является границей некоторого двумерного диска D. Тогда по формуле Стокса

$$\Delta\varphi = \int_{\partial D} \theta = \int_D \omega, \quad \text{где } \omega = d\theta.$$

Дифференциальная 2-форма $\omega = d\theta$ называется *формой кривизны* заданной связности. Она инвариантно определена, то есть *не* зависит от выбора тривиализации. Действительно, для другого выбора тривиализации мы имеем $\omega' = d\theta' = d\theta + ddg = d\theta = \omega$.

Из приведенных рассуждений мы получаем следующий вывод: *параллельный перенос не меняется при гомотопии пути в пространстве кривых с фиксированными концами, если и только если форма кривизны связности тождественно обращается в нуль*. Связность с нулевой формой кривизны называется *плоской*. 1-форма плоской связности, заданная в некоторой односвязной области базы, замкнута и выбором тривиализации ее можно превратить в нулевую форму.

Дифференциальная геометрия поверхностей

Покажем в качестве примера, как язык связностей в S^1-расслоении позволяет существенно упростить все вычисления в дифференциальной геометрии поверхностей.

Определение. *Метрикой*, или *римановой структурой* на поверхности называется невырожденное скалярное произведение в каждой ее касательной плоскости.

Если $M \subset \mathbb{R}^3$ — поверхность в трехмерном евклидовом пространстве, то ограничение евклидовой структуры на поверхность задает на ней риманову структуру.

Рассмотрим пространство W касательных векторов единичной длины. Это пространство образует S^1-расслоение $\pi\colon W \to M$. Слоем этого расслоения служит окружность касательных векторов единичной длины, приложенных к данной точке поверхности. Тривиализация этого расслоения задается полем ортонормированных касательных реперов (e_1, e_2) (полю e_1 соответствует значение углового параметра $\varphi = 0$, полю e_2 соответствует значение $\varphi = \pi/2$). Пусть (e_1^*, e_2^*) — двойственный базис 1-форм. Тогда 2-форма $\sigma = e_1^* \wedge e_2^*$, задающая *элемент площади*, не зависит от выбора тривиализации (с точностью до знака, который меняется при обращении ориентации поверхности).

Теорема. *Расслоение* π *обладает естественной связностью, называемой римановой. В тривиализации, задаваемой полем* (e_1, e_2) *ортонормированных касательных реперов,* 1*-форма римановой связности имеет вид*

$$\theta = \alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^*,$$

где коэффициенты α_1, α_2 *разложения по базису* e_1^*, e_2^* *определяются равенствами*

$$de_1^* = -\alpha_1 \sigma, \quad de_2^* = -\alpha_2 \sigma.$$

Условие, задающее форму связности θ, равносильно равенствам

$$de_1^* = -\theta \wedge e_2^*, \quad de_2^* = \theta \wedge e_1^*.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы нужно убедиться, что при изменении тривиализации заданная этими формулами форма связности преобразуется правильным образом. Поле реперов (e_1', e_2'), соответствующее другой тривиализации, получается из поля (e_1, e_2) поворотом на угол $g(x)$ в отрицательном направлении. Аналогичным образом преобразуется и двойственный базис 1-форм,

$$e_1'^* = \cos g\, e_1^* - \sin g\, e_2^*, \quad e_2'^* = \sin g\, e_1^* + \cos g\, e_2^*.$$

Дифференцируя базисные формы, получаем

$$\begin{aligned} de_1'^* &= \cos g\, de_1^* - \sin g\, de_2^* + dg \wedge (-\sin g\, e_1^* - \cos g\, e_2^*) = \\ &= -(\cos g)\theta \wedge e_2^* - (\sin g)\theta \wedge e_1^* - dg \wedge e_2'^* = \\ &= -\theta \wedge e_2'^* - dg \wedge e_2'^* = -(\theta + dg) \wedge e_2'^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} de_2'^* &= \sin g\, de_1^* + \cos g\, de_2^* + dg \wedge (\cos g\, e_1^* - \sin g\, e_2^*) = \\ &= -(\sin g)\theta \wedge e_2^* + (\cos g)\theta \wedge e_1^* + dg \wedge e_1'^* = \\ &= \theta \wedge e_1'^* + dg \wedge e_1'^* = (\theta + dg) \wedge e_1'^*. \end{aligned}$$

Отсюда $\theta' = \theta + dg$, что согласуется с (3). Теорема доказана. □

Форма кривизны римановой связности имеет вид $\omega = K\sigma$. Функция K точки поверхности называется *гауссовой кривизной*. В случае, когда M — поверхность в $\mathbb{R}^3$, гауссова кривизна равна произведению главных кривизн $K = \lambda_1\lambda_2$. Именно, выберем ортогональные координаты в $\mathbb{R}^3$ так, чтобы плоскость Oxy касалась поверхности в начале координат. Тогда поверхность задается как график функции $z = f(x, y)$. При указанном выборе координат разложение Тейлора функции f начинается с квадратичных членов,

$$f = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) + \ldots$$

Тогда главные кривизны λ_1, λ_2 — собственные значения квадратичной формы $ax^2 + 2bxy + cy^2$, а гауссова кривизна $K = \lambda_1\lambda_2 = b^2 - ac$ — ее определитель. Знаменитая «*блистательная*» *теорема Гаусса* утверждает, что в отличие от главных кривизн гауссова кривизна полностью определяется метрическими свойствами поверхности, то есть римановой структурой на ней. Это свойство гауссовой кривизны мы и взяли выше за определение.

Задача. Вычислить гауссову кривизну метрики $dx^2 + \cos^2 x\, dy^2$.

Р е ш е н и е. Координатные поля ∂_x, ∂_y ортогональны, но не нормированы (второе имеет длину $\cos x$). Поэтому в качестве ортонормированного репера возьмем поля

$$e_1 = \partial_x, \qquad e_2 = \frac{\partial_y}{\cos x}.$$

Двойственные 1-формы и элемент площади равны, соответственно,

$$e_1^* = dx, \quad e_2^* = \cos x\,dy, \quad \sigma = e_1^* \wedge e_2^* = \cos x\,dx \wedge dy.$$

Дифференцируя, находим форму связности

$$de_1^* = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad de_2^* = -\sin x\,dx \wedge dy = -\operatorname{tg} x\,\sigma, \quad \alpha_2 = \operatorname{tg} x,$$
$$\theta = \alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^* = \operatorname{tg} x\,e_2^* = \sin x\,dy.$$

Отсюда получаем окончательно,

$$\omega = d\theta = \cos x\,dx \wedge dy = \sigma,$$

то есть $K \equiv 1$. Заметим, что приведенная метрика есть стандартная метрика на единичной сфере в сферических координатах. □

Задача. Докажите, что метрика $dx^2 + x^2dy^2$ евклидова и найдите евклидовы координаты X, Y (в которых метрика принимает вид $dX^2 + dY^2$).

Р е ш е н и е. Действуя, как в предыдущей задаче, находим последовательно

$$e_1 = \partial_x, \quad e_2 = \frac{\partial_y}{x},$$
$$e_1^* = dx, \quad e_2^* = x\,dy, \quad \sigma = x\,dx \wedge dy.$$
$$de_1^* = 0, \quad de_2^* = dx \wedge dy = \frac{1}{x}\,\sigma,$$
$$\theta = 0\,e_1^* - \frac{1}{x}e_2^* = -dy.$$
$$\omega = d\theta = -ddy = 0, \quad K = 0.$$

Итак, связность плоская. Значит, существует другой репер (E_1, E_2), состоящий из *ковариантно постоянных* (касающихся поля связности) полей. Найдем эти поля. Всякое сечение расслоения W имеет вид

$$u = \cos\varphi\,e_1 + \sin\varphi\,e_2,$$

где угол φ является функцией точки базы. Условие ковариантной постоянности имеет вид

$$d\varphi - \theta = 0, \quad \text{то есть} \quad d\varphi = -dy, \quad \varphi = -y + \mathrm{const}.$$

Поля E_1, E_2 соответствуют значениям константы 0 и $\pi/2$ соответственно,

$$E_1 = \cos y\,e_1 - \sin y\,e_2, \quad E_2 = \sin y\,e_1 + \cos y\,e_2.$$

Нам нужно найти координаты, для которых указанные поля являются координатными. Чтобы найти их, заметим, что дифференциалы этих координат образуют двойственный базис:

$$dX = E_1^* = \cos y\, e_1^* - \sin y\, e_2^* = \cos y\, dx - x\, \sin y\, dy = d(x\, \cos y),$$
$$dY = E_2^* = \sin y\, e_1^* + \cos y\, e_1^* = \sin y\, dx + x \cos y\, dy = d(x\, \sin y).$$

Значит, $X = x\, \cos y$, $Y = x\, \sin y$. Иными словами, x, y — полярные координаты на стандартной евклидовой плоскости с евклидовыми координатами X, Y. □

Вычисления, проведенные в предыдущих задачах, существенно проще тех, которые проводятся при помощи стандартных методов. Объясним причину такого успеха. Обычно связность задается (в базисе *коммутирующих* координатных полей) своей матрицей, состоящей из 1-форм (см. лекцию А. А. Болибруха)

$$A = \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} dx + \Gamma^1_{12} dy & \Gamma^1_{21} dx + \Gamma^1_{22} dy \\ \Gamma^2_{11} dx + \Gamma^2_{12} dy & \Gamma^2_{21} dx + \Gamma^2_{22} dy \end{pmatrix}.$$

Даже с учетом симметрий символов Кристоффеля $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ связность задается набором из 6 функций. В наших же вычислениях связность определяется двумя коэффициентами формы θ, что позволяет утверждать, что наши вычисления в **три** раза короче обычных, не говоря уж о том, что благодаря инвариантной форме записи не возникает опасность запутаться в индексах и знаках. Выигрыш достигается за счет того, что в *ортонормированном* базисе символы Кристоффеля имеют больше симметрий: матрица связности кососимметрична и имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Формула Гаусса—Бонне

Пусть M — замкнутая ориентированная двумерная поверхность. Рассмотрим некоторое S^1-расслоение $\pi\colon W \to M$ и введем в нем произвольную связность. Тогда форма ϖ — форма кривизны этой связности — 2-форма, поэтому ее можно по M проинтегрировать.

Теорема. *Интеграл*

$$\chi(\pi) = \frac{1}{2\pi} \int_M \omega$$

принимает целые значения и является топологическим инвариантом, называемым числом Эйлера *расслоения. В случае, когда W — расслоение касательных единичных векторов, $\chi(\pi)$ совпадает с эйлеровой характеристикой $\chi(M) = 2 - 2g$ самой поверхности M.*

Классическая формула Гаусса—Бонне, являющаяся частным случаем этой теоремы, утверждает, что для всякой ориентированной замкнутой поверхности $M \subset \mathbb{R}^3$ выполняется равенство

$$\int_M K\sigma = 2\pi\,\chi(M).$$

Эта замечательная теорема является простейшим проявлением того, как глобальные топологические инварианты могут изучаться при помощи тех или иных дифференциально-геометрических структур. Более современными проявлениями этих идей являются теория Черна—Вейля, инварианты Дональдсона и Зайберга—Виттена, гомологии Флоера.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если заданы две связности, то разница их форм связности $\eta = \theta_1 - \theta_2$ является глобально заданной 1-формой на M, не зависящей от выбора тривиализации. Действительно, при другом выборе тривиализации мы имеем

$$\theta_1' - \theta_2' = (\theta_1 + dg) - (\theta_2 + dg) = \theta_1 - \theta_2.$$

Отсюда вытекает, что формы кривизны этих связностей связаны соотношением $\omega_1 - \omega_2 = d\eta$, откуда по формуле Стокса,

$$\int_M \omega_1 - \int_M \omega_2 = \int_M d\eta = 0.$$

Таким образом, число $\chi(\pi)$ действительно является инвариантом. Чтобы вычислить его, постараемся построить у расслоения π глобальное непрерывное сечение s. Если нам это удастся, то расслоение тривиально, и связность, в которой s ковариантно постоянно, является плоской. Поэтому $\int_M \omega = 0$ в данном случае. В общем случае глобальное сечение построить нельзя. Покажем, однако, что его всегда можно построить в дополнении к некоторому конечному набору точек.

Реализуем расслоение W как расслоение единичных окружностей в некотором двумерном векторном расслоении $E \to M$. Выберем сечение $v\colon M \to E$ этого векторного расслоения (для этого уже никаких топологических препятствий не будет). Пусть $X \subset M$ — множество нулей этого сечения. В каждом слое над дополнением $M \setminus X$ точку сечения v можно спроектировать вдоль направления радиус-вектора на единичную окружность и получить, тем самым, непрерывное сечение исходного расслоения π над $M \setminus X$. Осталось заметить, что если v — сечение общего положения, то множество его нулей состоит из конечного числа точек (строгое обоснование этого интуитивно понятного утверждения требует привлечения дополнительных технических средств, например, теоремы Сарда). Если, например, E — расслоение касательных векторов, то v — это векторное поле, и X — множество его особых точек.

Итак, пусть выбрано сечение s расслоения π, заданное в дополнении к набору точек $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset M$. Пусть U_i — маленькая окрестность точки x_i. Тогда при обходе вокруг точки x_i в положительном направлении сечение s делает некоторое количество оборотов в слое (в некоторой тривиализации над U_i). Количество этих оборотов мы назовем индексом сечения s в точке x и обозначим через $\mathrm{ind}_s(x)$. Мы хотим доказать равенство

$$\chi(\pi) = \sum_X \mathrm{ind}_s(x_i) \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

В случае, когда расслоение образовано касательными векторами, сумма (4) совпадает с суммой индексов особых точек общего векторного поля на поверхности, откуда и будет следовать теорема.

Для доказательства равенства (4) рассмотрим плоскую связность в $M \setminus X$, для которой сечение s ковариантно постоянно. В тривиализации над (проколотой) окрестностью $U_i \setminus x_i$ эта связность задается формой $\tilde{\theta}_i$, которая замкнута, $d\tilde{\theta}_i = 0$ и для которой, по построению, имеет место равенство

$$\int_{\gamma_i} \tilde{\theta}_i = 2\pi \,\mathrm{ind}_s(x_i),$$

где γ_i — произвольный путь в U_i, обходящий точку x_i один раз в положительном направлении.

Рассмотрим произвольную гладкую форму θ_i, которая определена на всей области U_i и совпадает с $\tilde{\theta}_i$ вблизи границы ∂U_i (например, можно положить $\theta_i = \rho_i \tilde{\theta}_i$, где функция ρ_i равна единице вблизи ∂U_i и равна нулю в некоторой меньшей окрестности точки x_i).

Построенные формы θ_i склеиваются в связность нашего расслоения, определенную уже на всем M. Эта связность больше не является плоской, однако носитель формы кривизны сосредоточен в объединении областей U_i, поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int_M \omega = \sum \frac{1}{2\pi}\int_{U_i} \omega = \sum \frac{1}{2\pi}\int_{U_i} d\theta_i =$$
$$= \sum \frac{1}{2\pi}\int_{\partial U_i} \theta_i = \sum \frac{1}{2\pi}\int_{\partial U_i} \tilde{\theta}_i = \sum \mathrm{ind}_s(x_i),$$

что и доказывает равенство (4), а вместе с ним и теорему. $\square$

Задача. Найдите число Эйлера *расслоения Хопфа* $S^3 \to S^2$, сопоставляющего точке единичной сферы $S^3 \in \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ проходящую через нее комплексную прямую, рассматриваемую как точку проективной прямой $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$. (Ответ: -1.)

Максим Эдуардович Казарян

Дифференциальные формы, расслоения, связности

Редактор В. Клепцын
Серийное оформление обложки разработал М. Панов.

Издательство Московского Центра
непрерывного математического образования

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г.

Подписано в печать 27.2.2002 г. Формат 60×88 $^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Печ. л. 1. Тираж 1000 экз. Заказ № .

МЦНМО
121002, Москва, Большой Власьевский пер., 11

Отпечатано с готовых диапозитивов в Московской типографии «Транспечать»
107078, Москва, Каланчевский тупик, д. 3/5

ISBN 5-94057-023-2

9 785940 570233 >